数理解析研究所講究録
639巻 1988年 98-111

超幾何微分方程式系 (F_1) と保型関数

滋賀医大　寺田俊明 (Toshiaki Terada)

§1　1変数の場合

Euler の微分方程式

$$(1.1)\qquad F'' + \left[\frac{\lambda_{01}-1}{x} + \frac{\lambda_{12}-1}{x-1}\right]F' + \frac{\lambda_\infty(1-\lambda_1)}{x(x-1)}F = 0$$

を考える。ただし，$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_\infty$ を $\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_\infty = 2$ を満たす複素助変数として $\lambda_{ij} = \lambda_i+\lambda_j-1$ $(0\leqq i<j\leqq 2)$ とする．普通は，助変数 $\alpha=\lambda_\infty$, $\beta=1-\lambda_1$, $\gamma=\lambda_2+\lambda_\infty$ が用いられている。(1.1) は Euler の積分表示をもち，

$$(1.2)\qquad \omega_i(x) = \int_0^{x_i} u^{\lambda_0-1}(u-x)^{\lambda_1-1}(u-1)^{\lambda_2-1}\,du$$

$$(i=1,2\ ;\ x_1=x,\ x_2=1)$$

は解の1つの基で，領域

$$D = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$$

上で多価正則である。Gauß の超幾何級数：

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha,\nu)(\beta,\nu)}{(\gamma,\nu)(1,\nu)}x^\nu$$

(例えば $(\alpha,\nu)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)$)

$$= \frac{1}{B(\lambda_2, \lambda_\infty)} \frac{1}{1 - 1/\mu_\infty} \left[\mu_0 (1-\mu_1)\omega_1 - (1-\mu_0\mu_1)\omega_2 \right]$$

（$B(\ ,\ )$ はベータ関数，$\mu_i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_i)$）

が $x = 0$ で正則な唯1の解である。

1873年 H. Schwarz [2] は次のことを示した．

(1.3) 定理．すべての i, j $(0 \leqq i < j \leqq 2)$ に対して，

$$\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}^{-1} := \{0\} \cup \{1/m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

であって，しかも $\lambda_{ij} \geqq 0$ [1] であるならば，

$$w = \omega(x) := \omega_1(x)/\omega_2(x)$$

の逆関数

$$x = \omega^{-1}(w)$$

は，

i) $\lambda_\infty > 0$ ならば（$1/\lambda_\infty \in \mathbb{Z}$ のとき）[2] 単位円（と同型な領域）で一価，

---

1) この条件は，実際には，何の制限にもなっていない。$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_\infty$ の置換と，変換：$\lambda_i \mapsto (1-\lambda_i)$ $(i = 0, 1, 2, \infty)$ の組合せにより，$\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}^{-1}$ ならば常に $\lambda_{ij} \geqq 0$ であると仮定できる．

2) Kampé de Ferié [6] に見られるように，この条件の下で証明されているように思われるが，実は不用である．

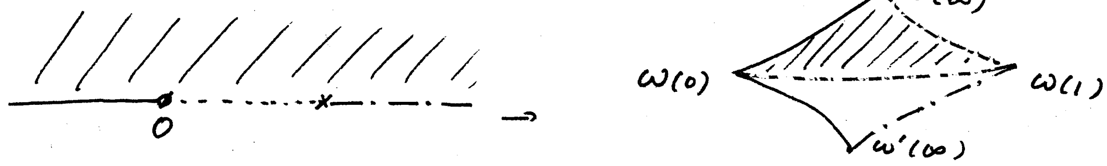
ii) $\lambda_\infty = 0$ ならば Gauß平面で一価,

iii) $\lambda_\infty < 0$ ならば, $1/\lambda_\infty \in \mathbb{Z}$ のとき, Riemann 球で一価, しかも微分方程式 (1.1) のモノドロミー群により誘導される変換群により不変である。つまり $\omega^{-1}(w)$ は保型関数であり, それぞれ i) Fuchs 関数, ii) 楕円関数 又は指数関数, iii) 多項式となる。基本領域は, $S_{01}=\{x=0\}$, $S_{12}=\{x=1\}$, $S_{20}=\{x=\infty\}$, $S_0=\bigcup_{i,j}\{S_{ij} \mid \lambda_{ij}=0\}$ として, $Y_0=\mathbb{P}^1-S_0$ とおくと, Y_0 に同型である. 従って関数体は, Y_0 がコンパクト ($S_0=\phi$) なとき純超越的である.[1)]

[証明の概略] $x \doteqdot 0$ の近傍で (1.1) は

$x^{\lambda_{01}}f_1(x)$, $f_2(x)$ [2)] (f_1, f_2 は $x=0$ で正則, $f_i(0)\neq 0$)

という形の解の基をもち, $x=1$, $x=\infty$ でも同様である。[3)]
$\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($i=0,1,2$) のとき, (1.1) は $x\in\mathbb{R}$ に対して実数解の基をもつから, $\omega(x)=\omega_1/\omega_2$ は上半平面を w-平面上の, 頂角がそれぞれ $\lambda_{01}\pi, \lambda_{12}\pi, \lambda_{20}\pi$ の円弧三角形に移す。



1) 楕円関数の場合でも, 関数体は楕円関数体ではなく, たとえば $\wp(w)$ の有理関数全体となる.

2) $\lambda_{01}\in\mathbb{Z}$ なら $\log x$ が現れることがある. 詳細は[3]

3) $x=\infty$ なら解の基に $x^{-\lambda_\infty}$ を乗ずるとこの形になる。

$\omega(x)$ の実軸，たとえば $[0,1]$ 区间を越えての解析接続に応じて，$\omega^{-1}(w)$ は対称の原理により弧 $\omega(0)\,\omega(1)$ を越えて接続される．よって ω^{-1} が一価であるためには $\lambda_{ij}\in\mathbb{Z}^{-1}$ が必要である。さらに，i) ii), iii) の条件に応じて，対応する領域で一価となる。

§2 问題，既知の結果

Schwarz の定理の略証には条件：$1/\lambda_\infty\in\mathbb{Z}$ は現れず，一見不要に見えるが，本当だろうか。もし必要とすれば $\omega^{-1}(w)$ の局所的な一価性についてなのか，それとも大局的な性質に関するものなのか。さらに，この定理の拡張としてどんなものが考えられるか。そこで次の问題を設定する．

问題 1．条件：$1/\lambda_\infty\in\mathbb{Z}$ は何を意味するのか．

问題 2．Schwarz の結果の多変数への拡張．

问題 2 については，n 変数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関する微分方程式系 (F_1) に限定して考える．

$$
(F_1)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}+\Big[\sum_{0\leqq\alpha\leqq n+1,\,\alpha\neq i}\frac{1-\lambda_\alpha}{x_i-x_\alpha}\Big]\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\lambda_\infty(1-\lambda_i)}{x_i(x_i-1)}F\\
&\qquad+(\lambda_i-1)\sum_{1\leqq\alpha\leqq n,\,\alpha\neq i}\Big[\frac{1}{x_i-x_\alpha}+\frac{1-x_i-x_\alpha}{x_i(x_i-1)}\Big]\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}=0\quad(1\leqq i\leqq n)\\
&(x_i-x_j)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}+(\lambda_j-1)\frac{\partial F}{\partial x_i}-(\lambda_i-1)\frac{\partial F}{\partial x_j}=0\quad(1\leqq i<j\leqq n)
\end{aligned}
\right.
$$

λ_i $(i=0,1,\cdots,n+1,\infty)$ は複素定数で $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_\infty=n+1$ である．

微分方程式系 (F_1) の性質を述べる前に定義と記号を列挙する．

$X:=\mathbb{P}^n(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$，さらに $x_0=0$ とする．ただし，以下 S_I, $\hat{S}_I$ などを定義する場合を除いて常に $x_{n+1}\equiv 1$ とし，$x_1,\cdots,x_n$ を非斉次座標とする．

$I:=\{i_0,i_1,\cdots,i_p\}$ $(i_\alpha\in\mathbb{Z},\ 0\leqq i_\alpha\leqq n+1,\ \alpha\neq\beta$ のとき $i_\alpha\neq i_\beta,\ 1\leqq p\leqq n)$ に対して，

$\lambda_I:=\lambda_{i_0}+\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-p,\quad \mu_I:=\exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_I)$

$S_I:=\{x\in X\mid x_{i_0}=x_{i_1}=\cdots=x_{i_p}\}$

$D:=X-\bigcup_{0\leqq i<j\leqq n+1}S_{ij}$

$\hat{X}$：次の列によって得られる X の改変：

$\hat{X}=X_1\xrightarrow{\sigma_2}X_2\xrightarrow{\sigma_3}\cdots\xrightarrow{\sigma_n}X_n=X$

ただし σ_p $\underbrace{\text{はすべて}}_{\text{大雑把に言うと}}$ の S_I $(I=\{i_0,i_1,\cdots,i_p\})$ に沿う σ-process

$\hat{S}_I$：$\sigma=\sigma_2\circ\sigma_3\circ\cdots\circ\sigma_n$ による S_I の改変

Picard-Schwarz の条件を (F_1) が満たす：すべての $I=\{i_0,\cdots,i_p\}$ に対して

$$\lambda_I\in\mathbb{Z}^{-1}:=\{0\}\cup\{1/m\mid m\in\mathbb{Z}\}$$

次に，どの λ_i $(0\leqq i\leqq\infty)$ も整数でないとの条件の下での

(F_1)の基本的性質を列挙する[3].

(2.1) (F_1)は完全積分可能, Euler型の積分表示によって解の1つの基が表せる.

$$\omega_i := \int_0^{x_i} u^{\lambda_0-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-x_n)^{\lambda_n-1}(u-1)^{\lambda_{n+1}}du \qquad (1\leqq i\leqq n+1)$$

(2.2) Dの基本群は, S_{ij}に関するloopを表すA_{ij} $(0\leqq i<j\leqq n+1)$によって生成されるが, A_{ij}に対するモノドロミーマトリックスB_{ij}が具体的に計算されている.

(2.3) $w_i=\omega_i$はDから$\mathbb{P}^n(w_1,\cdots,w_{n+1})$への局所双正則な多価写像となる. それを$\omega$とする.

(2.4) すべてのλ_i $(0\leqq i\leqq\infty)$が実数のとき, モノドロミーで不変なエルミート行列$A:=(a_{ij})$が存在する:

$$B_{ij}^{*}AB_{ij}=A \qquad (0\leqq i<j\leqq n+1)$$

特に, $0<\lambda_i<1$ $(0\leqq i\leqq\infty)$ならばAのsignatureは$(n,1)$となり, 従ってRiemannの不等式によってωの像は超球

$$\sum_{i,j=1}^{n+1}a_{ij}w_i\overline{w_j}<0$$

に含まれる.

(2.5) (解の特異点での局所的性質) S_I $(I=\{i_0,i_1,\cdots,i_p\})$の通常点(他の$\hat{S}_J$との共通点でない)$\hat{x}$の十分小さな近傍Uに対して, 下の(a)又は(b)の形の解の基が存在する. ただしx_Iは$\hat{x}$での座標系の一部で$\{x_I=0\}=\hat{S}_I\cap U$,

f_i は U で一価正則な関数である ($I \supset \{0, n+1\}$ ならば全体に $x_I^{\lambda_\infty}$ を乗ずる)

(a) $\lambda_I \notin \mathbb{Z}$ ならば,

$$x_I^{\lambda_I} f_1, x_I^{\lambda_I} f_2, \cdots, x_I^{\lambda_I} f_p, f_{p+1}, \cdots, f_{n+1}$$

(b1) $\lambda_I \in \mathbb{Z}, \lambda \geqq 0$ ならば

$$x_I^{\lambda_I} f_1, \cdots, x_I^{\lambda_I} f_p, x_I^{\lambda_I} f_p \log x_I + f_{p+1}, f_{p+2}, \cdots f_{n+1}$$

(b2) $\lambda_I \in \mathbb{Z}, \lambda < 0$ ならば

$$x_I^{\lambda_I} f_1, \cdots, x_I^{\lambda_I} f_{p-1}, f_p, f_p \log x_I + x_I^{\lambda_I} f_{p+1}, f_{p+2}, \cdots f_{n+1}$$

さて, 問題2は, (F_1) の場合, 次の命題の正否という形に変形される.

(2.6) 命題 $\mathbb{P}^n(w_1, \cdots, w_{n+1})$ (の適当な改変) 上の領域 B, D の適当な compact 化 Y, Y 上の解析集合 S_0 ($\subset Y-D$), $Y_0 := Y - S_0$ 上の被覆領域 Z (射影 $\pi: Z \to Y_0$ は proper, $Y_0 - D$ 上でのみ分岐する) が存在して, 次の条件を満たす:

ω の逆写像 ω^{-1} は B から Z への双正則な写像に拡張される。

このとき ω^{-1} は, 群が (F_1) のモノドロミー群より誘導される保型関数体を定義する。基本領域は Y_0 と同型, 従って Y_0 がコンパクト又は Y_0 に擬凹状集合を付加してコンパクト化ができる場合には, その関数体は純超越的である。

次の定理は問題2の部分的な解である.

(2.7)定理[3]. $0<\lambda_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n+1,\infty)$ のとき，命題(2.6)が正しいための必要十分条件は，Picard-Schwarzの条件が成立つことである。

(2.7)は，$n=1$ のとき Schwarz の i)と同じである。$n \geqq 2$ のときこの条件を満たす場合は有限個しかなく，(助変数 λ_i の置換を除くと) $n=2$ で 27, $n=3$ で 7, $n=4,5$ でそれぞれ1つのみで $n>5$ なら存在しない。この場合領域Bは超球：$\sum a_{ij} w_i \overline{w_j} = 0$ であり，基本領域 Y_0 [1] は $\hat{X} - \bigcup_J \{\hat{S}_J \mid \lambda_J = 0\}$ と双有理的である。Y_0 の有理包は Y となり，従って関数体はすべて純超越的となる. $n=3$ の場合でも Y_0 がコンパクトな例が2つある。証明は，解の特異点での局所的性質(2.5)および不変Hermite形式Aにより定義されるcompleteなPoincaré-Bergman計量を使っての ω^{-1} の解析接続による。Deligne-Mostow [1] は代数幾何学的な別証明を与えている。

---

1) $n=2$ のとき，$\hat{X}$ から出発し，$\lambda_I=0$ である $\hat{S}_I$ を除き，$\lambda_{ij}<0$ である $\hat{S}_{ij}$ と $\lambda_{ijk}>0$ である $\hat{S}_{ijk}$ を blow down して得られる.

§3. 問題の解

ここでは，命題（2.6）が成立するための必要十分条件を述べる．これによって（F1）に関する限り，問題2は解決されたことになる．なお後に見るように，問題1も自動的に解けたことになる．

まず，命題（2.6）が正しいためには Picard-Schwarz の条件が必要であることが，後出の定理（3.2）を使って ω の局所的性質を調べることによって分る．$n=2$ のとき，この条件が満たされるのは次の10個に限られる（既出の27個を除いて）

	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_∞	B
(1)	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	0	$\mathbb{C}^2$
(2)	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	$\mathbb{C} \times (\text{disk})$
(3)	$1/3$	1	1	$1/3$	$1/3$	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$
(4)	$1/2$	1	1	$1/3$	$1/6$	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$
(5)	$1/2$	1	1	$1/4$	$1/4$	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$
(6)	$1/2$	1	1	$1/2$	0	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$
(7)	$1/m$	1	1	$-1/m$	1	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ (m \neq \infty)$; $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ (m = \infty)$
(8)	$3/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	
(9)	$5/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	
(10)	$7/6$	$5/6$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	

しかし上のすべての場合に命題(2.6)が正しい訳ではない。

(3.1)定義. 超幾何微分方程式系(F_1)に対して添字の集合 $I=\{i_0, i_1, \cdots, i_p\}$ が非対数的とは次の5条件の少なくとも1つが成立することであり，そうでないとき対数的という。

(1) $\lambda_I \notin \mathbb{Z}$

(2) すべての $i_\alpha \in I$ について $\lambda_{i_\alpha} \in \mathbb{Z}^+ := \{m \in \mathbb{Z}, m>0\}$

(3) すべての $i_\alpha \in I$ について $1-\lambda_{i_\alpha} \in \mathbb{Z}^+$

(4) すべての $j \notin I$ $(j=0,1,\cdots,n+1,\infty)$ について $\lambda_j \in \mathbb{Z}^+$

(5) すべての $j \in I$ $(j=0,1,\cdots,n+1,\infty)$ について $1-\lambda_j \in \mathbb{Z}^+$

(3.2)定理. (F_1) に対して，命題(2.6)が成立するための必要十分条件は，Picard-Schwarzの条件及び条件:

(*) $\lambda_I = \pm 1$ となる I が存在すれば，I は非対数的である。

が成立することである。

これは(F_1)に対する問題2の解決を与えるものである。

$n=2$ のとき，既出の表の内(8),(9),(10)については $\lambda_{01}=1$ であるのに I は対数的だから，ω^{-1} は一価ではな

い． (1)〜(7) については，ω^{-1} は保型関数を定義する．その領域 B が表の右に記されている．(1) の Y_0 は射影空間 X そのものであり，関数は Abel 関数となる．(2) の B は直積だが，その群はそうではない．Y_0 は X において $x_1=x_2=x_3$, $x_1=x_2=0$, $x_2=x_3=0$, $x_3=x_1=0$ で blow up し，$x_i=x_j$ $(0\leqq i<j\leqq 3)$ をすべて除いて得られる．(3)〜(7) はすべて領域も群も1変数の直積であって，Schwarz の結果に含まれるのであまりおもしろくはない。(1) は吉田氏によって得られた，$\bigcup_{0\leqq i<j\leqq n+1} S_{ij}$ のみで分岐する $\mathbb{P}^2$ 上の被覆領域で，普遍被覆空間が $\mathbb{C}^2$ となるものの唯1の例である[5]．

$n\geqq 3$ の場合，この表の (2)〜(7) で λ_3 を λ_{n+1} の値とし，さらに $\lambda_3=\lambda_4=\cdots=\lambda_n=1$ とおくと Picard-Schwarz の条件と (*) を同時に満たすものの例が作れる。しかしこのとき ω^{-1} より定義される保型関数は，すべて1変数または2変数の直積となるのでつまらない。$n=3, 4, 5, 6, 7$ については上記のもの以外に Picard-Schwarz の条件を満たす場合があるが，そのいずれも (*) を満たさない。従って，$0<\lambda_i<1$ $(0\leqq i\leqq\infty)$ でなければ本質的には $n\leqq 2$ の場合しか例が存在しないことになる．

〔問題1の解〕 $n=1$ のとき，Picard-Schwarz の条件が満たされしかも $\lambda_{ij} \geqq 0$ $(0 \leqq i < j \leqq 2)$ であるならば，簡単な計算により，$\lambda_\infty \in \mathbb{Z}^{-1}$ と条件 (*) とは同値である。$0<\lambda_i<1$ のとき $\lambda_I = \pm 1$ となることはないから $\lambda_\infty \in \mathbb{Z}^{-1}$ は不要しかし $\lambda_\infty < 0$ の場合は必要である。もし (*) が満たされていず，$\lambda_I = \pm 1$ ならば [3] P.464 で分るように ω^{-1} が $\hat{S}_I$ の近傍の像の中で一価とならない。つまり iii) では $1/\lambda_\infty \in \mathbb{Z}$ は必要で，それは $\hat{S}_I$ での局所的な理由による。

〔証明の大要〕 定理(3.2)の証明は定理(2.7)のと本質的に同じである。必要なことは，いずれかの λ_i が整数の場合に (F_1) の性質を詳しく調べることのみ。

(3.3) 定理．

$$\omega_i' = \frac{1}{\Gamma(\lambda_i)}\omega_i \qquad (1 \leqq i \leqq n+1)$$

とすると，ω_i' $(1 \leqq i \leqq n+1)$ は，$\lambda_\infty \notin \mathbb{Z}^+$ かつ $1-\lambda_0 \notin \mathbb{Z}^+$ のとき (F_1) の解の1つの基となる

(3.4) 系．$\lambda_k \notin \mathbb{Z}^+$，$1-\lambda_j \notin \mathbb{Z}^+$ とすると

$$\omega_i' = \frac{1}{\Gamma(\lambda_i)}\int_{x_j}^{x_i} u^{\lambda_0-1}(u-x_1)^{\lambda_1-1}\cdots(u-1)^{\lambda_{n+1}-1}\,du$$

$$(0 \leqq i \leqq \infty,\ i \neq j, k)$$

が (F_1) の基となる。[1]

(3.3), (3.4) によって一般の場合に ω_i' を基として (F_1) のモノドロミー行列が具体的に計算でき，それによって次の定理を得る．

(3.5) 定理（一般の場合の (F_1) の解の局所的性質）．定義・記号は (2.5) と同じとする． $\hat{x} \in \hat{S}_I$ が通常点のとき，$\hat{x}$ の近傍での (F_1) の解の基で次の形のものが存在する．

(a) I が非対数的ならば (2.5) の (a) と同じ．

(b) I が対数的ならば $\lambda_I \geqq 0$ または $\lambda_I < 0$ に応じてそれぞれ (b1) または (b2) と同じ．

定理 (3.5) と [3] Lemme 9 によって ω^{-1} が一価となるためには Picard-Schwarz の条件と (*) が必要であることが分る．十分であることの証明は矢張，complete かつ不変な計量を使って ω^{-1} を解析接続することによる．しかし一般には不変 Hermite 行列 A' は正則でないので，A' を λ_i の関数として，

---

1) $\lambda_0+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}+\lambda_\infty = n+1$ よりこのような j, k は少なくとも1組存在する．

A' に λ_i の実関数を掛けておき, λ_i が問題の値に近づくとその極限をとることによって計量を作る.[1]

参考文献

[1] Deligne, P., et Mostow, G.D., Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, Publ. Math. IHES. n°63. 1986, 1-89.

[2] Schwarz, H.A., Ueber diejenigen Fällen in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraisches Funktion ihres vierten Elementes darstellt, J. r. und angew. Math. 75 (1873), 292-295

[3] Terada, T, Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 452-475

[4] ———, Hypergeometric function F_1 and automorphic functions. preprint

[5] Yoshida, M., Kaneko, J., and Tokunaga, S., Complex crystallographic groups II. J. Math. Soc. Japan. 34 (1982)

[6] Kampé de Fériet, Fonction hypergeometrique, Gautier-Villars.

1) 詳細は[4]参照.